Georges BARTHÉLEMY

LES PREUVES CANTORIENNES D'EXISTENCE

DE LA PUISSANCE DU CONTINU

*

TABLE

INTRODUCTION

Georg Cantor a établi qu'il existe des ensembles infinis dont le cardinal est supérieur à celui de l'ensemble **N** des entiers [1]. C'est le cas de l'ensemble **R** des réels, mais également celui de l'ensemble des parties de **N**. Leur cardinal commun, la puissance du continu, est supérieur à $\aleph_0$, la puissance du dénombrable.

On dispose de plusieurs démonstrations de ce résultat. Toutes procèdent par l'absurde, ce qui n'est pas peu intriguant : cette différence radicale des puissances ne se présente pas comme un donné. Aucun propos, aucune expérience ne semblent engendrer quelque perception de la différence entre le dénombrable et le continu. La perplexité que cela suscite se manifeste d'ailleurs dans la littérature [2]. Devant pareil état de choses, il ne paraît pas déplacé de faire acte de scepticisme à l'égard des preuves d'existence de la puissance du continu.

Dans les pages qui suivent, les deux preuves principales sont exposées, comparées l'une à l'autre et enfin critiquées. Il en résulte une appréciation négative : l'existence de la puissance du continu est pour le moins problématique.

Si cette étude donnait l'impression d'exprimer une position constructiviste, on devrait pouvoir s'assurer, en examinant les choses de près, qu'il n'en est rien : la critique y est menée dans le cadre même où les preuves prennent place [3].

---

1. Dans tout le texte « supérieur » est mis pour « strictement supérieur » et « entier » pour « entier naturel ».
2. Voir par exemple, de Jean-Paul DELAHAYE, « Arguments et indices dans le débat sur le réalisme mathématique » dans *L'objectivité mathématique* (sous la direction de Marco PANZA et de Jean-Michel SALANSKIS).
3. Une première version de cette étude a eu l'honneur de lectures attentives, il y a un certain temps déjà, de la part de Jean-Paul DELAHAYE, Egidio GIUSTI, Marco PANZA, Philippe de ROUILHAN et Jean-Michel SALANSKIS. Leurs observations, reçues avec beaucoup de gratitude, ont été examinées avec grande attention.

I. EXPOSITION

On rencontre dans les ouvrages trois preuves de l'existence d'ensembles plus puissants que **N**, toutes trois attribuées à Cantor. La première, historiquement parlant, n'est presque jamais évoquée [4]. On montrerait aisément qu'elle équivaut à la démonstration connue sous le nom de méthode de la diagonale. Celle-ci est la deuxième, ici renommée *méthode de l'antidiagonale*. La troisième n'a pas de nom usuel. Certains auteurs la désignent aussi comme méthode de la diagonale parce que, dans une certaine mesure, elle ressemble à la précédente. On propose de l'appeler *méthode de l'externat*. L'exposition qui suit se veut fidèle aux manières les plus courantes de délivrer ces deux preuves-ci.

1. La méthode de l'antidiagonale

Il s'agit de démontrer par l'absurde que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable, c'est-à-dire qu'il ne peut exister de bijection de **N** dans **R** [5]. Ayant préalablement réduit le problème à l'intervalle $[0,1]$ [6], on le déplace vers un ensemble de suites. Chacun des réels de $[0,1]$ admet un développement décimal et, tout aussi bien, un développement binal [7] : tout réel de cet intervalle peut prendre la forme $0, \ldots$, les points de suspension représentant une suite de *nombres binaires*, c'est-à-dire de zéros et de uns. On appellera *suites binaires* de telles suites. Inversement, à toute suite binaire $S = b_0\, b_1\, b_2 \ldots$, où chacun des b_n est l'un des binaires 0 ou 1, correspond le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}}$ [8].

Le problème revient ainsi à démonter par l'absurde que l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}$ des suites binaires n'est pas dénombrable. Supposons donc qu'il le soit. Grâce à une bijection σ appliquant **N** sur $\boldsymbol{\Sigma}$, chaque suite binaire bénéficie d'un numéro d'ordre, aussi appelé *indice* de la suite.

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbf{N} &\to \boldsymbol{\Sigma} \\ n &\to S^n \end{aligned}$$

La suite $(S^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est renotée $\boldsymbol{\Sigma}_\sigma$. En développant chacune des suites binaires constituant $\boldsymbol{\Sigma}_\sigma$, on obtient donc un tableau doublement infini de binaires :

---

4. Présentation succincte par Jean DHOMBRES dans Nombre, mesure et continu (voir la note 10).

5. Dans tout ce texte « dénombrable » est pris pour « strictement dénombrable », c'est-à-dire infini dénombrable. L'usage impose cet adjectif, dont le choix n'est pas heureux : dans la langue courante, des objets dénombrables sont des objets en nombre fini. « Numérotable » est plus approprié ; du moins peut-on l'employer pour les éléments, en réservant « dénombrable » pour l'ensemble.

6. Pour que **R** soit dénombrable, il faut et il suffit que $[0,1]$ le soit. En effet, **R** est la réunion dénombrable des intervalles $[n, n+1]$, n décrivant **N** ; et chacun d'entre eux est équipotent à $[0,1]$.

7. Aussi appelé développement dyadique. Les décimales laissent ici la place à des binales.

8. Certains réels de $[0,1]$ ont deux développements binaux : $1/2$ s'écrit 0,100 ... (développement propre) et, tout aussi bien, 0,011 ... (développement impropre). Les dévelopements impropres étant numérotables, la dénombrabilité de $[0,1]$ équivaut à celle de l'ensemble de toutes les suites binaires. On choisit ici de ne pas exclure celles qui, à partir d'un certain rang, ne contiennent que des 1.

$$
\begin{array}{lcl}
S^0 & = & b_0^0 \; b_1^0 \; b_2^0 \; \ldots \\
S^1 & = & b_0^1 \; b_1^1 \; b_2^1 \; \ldots \\
S^2 & = & b_0^2 \; b_1^2 \; b_1^2 \; \ldots
\end{array}
$$

&c.

On forme alors la *suite diagonale* de $\mathbf{\Sigma}_\sigma$: $D = b_0^0 \, b_1^1 \, b_2^2 \ldots$; puis on change chacun des binaires b_n^n en son contraire : un 0 devient un 1, et un 1 devient un 0. On appelle *suite antidiagonale* de $\mathbf{\Sigma}_\sigma$ la suite A ainsi constituée : $A = \overline{b_0^0} \, \overline{b_1^1} \, \overline{b_2^2} \ldots$, avec $\overline{b_n^n} = 1 - b_n^n$.

Quel que soit n, le $(n+1)^{\text{ième}}$ élément $\overline{b_n^n}$ de A est différent du $(n+1)^{\text{ième}}$ élément b_n^n de D, lequel se trouve être aussi le $(n+1)^{\text{ième}}$ élément de S^n ; toute suite S^n est donc différente de A. Puisque A est distincte de tous les termes de $\mathbf{\Sigma}_\sigma$, il est prouvé qu'il existe une suite binaire n'appartenant pas à $\mathbf{\Sigma}$, contrairement à l'hypothèse. Cette dernière n'est donc pas tenable : l'ensemble $\mathbf{\Sigma}$ des suites binaires n'est pas dénombrable, et **R** non plus [9] [10].

2. La méthode de l'externat

Soit un ensemble X quelconque. On désigne par $\Pi(X)$, ou plus simplement par Π, l'ensemble des parties de X. L'application de X dans Π qui à chaque x associe $\{ x \}$ étant une injection, le cardinal de Π est au moins égal à celui de X. Il s'agit de démontrer qu'il lui est supérieur (résultat connu sous l'appellation de théorème de Cantor). Il s'agit donc de prouver qu'il ne peut exister de bijection de X dans Π.

Procédons par l'absurde, en supposant qu'il existe une bijection π de X dans Π. Pour chaque élément x de X, $\pi(x)$ est un sous-ensemble de X dont x peut être appelé l'*indice* [11].

$$
\begin{array}{rcl}
\pi : X & \to & \Pi \\
x & \to & \pi(x)
\end{array}
$$

Il est envisageable que l'élément x appartienne à la partie $\pi(x)$. Si tel est le cas, x sera dit *interne* pour π, et *externe* sinon. Désignons par I l'ensemble des internes : $I = \{ x \in X \mid x \in \pi(x) \}$; c'est l'*internat* de X pour π. Semblablement a-t-on l'ensemble des externes : $E = \{ x \in X \mid x \notin \pi(x) \}$; c'est l'*externat* de X pour π.

---

9. La méthode de l'antidiagonale est exposée notamment dans :
   – Stephen C. KLEENE, *Logique mathématique*, p. 188. Voir, page 11 de la présente étude, « Une variante de l'antidiagonale. »
   – Michel COMBÈS, *Fondements des mathématiques*, p. 8.
   – *Encyclopédie Alpha des sciences,* p. 44.

10. La démonstration évoquée dans la note 4 consiste, après avoir supposé la numérotabilité des réels, à construire une suite d'intervalles emboîtés à bornes rationnelles, en faisant en sorte que chaque réel soit extérieur à l'un de ces intervalles, donc extérieur à leur intersection. Or celle-ci définit un réel, lequel n'est donc pas un terme de la suite envisagée (*op. cit.*, p. 241).

11. Il suffirait de prouver qu'il ne peut y avoir de surjection de X dans Π. Prendre une bijection permet de n'attribuer qu'un indice à chaque partie de X.

Puisque E est une partie de X, il a lui-même un indice e : $E = \pi(e)$. Soit e est externe, soit il est interne. Si $e \in E$, alors, par la définition même de E, $e \notin \pi(e)$ et donc $e \notin E$. Inversement, si $e \notin E$, alors, toujours par définition de E, $e \in E$. Bref, la définition de E et celle de e font que, si e est externe, il est interne, et réciproquement. On aboutit ainsi à une contradiction ; il n'existe donc pas de bijection de X dans Π [12].

12. Cette méthode de l'externat est exposée notamment dans :
   - J. et M. CORET. *Théorie élémentaire de la cardinalité*, p. 19.
   - Jean DHOMBRES, *Nombre, mesure et continu*, p. 269.
   - Josette ADDA, *Éléments de logique pour enseignants en mathématiques*, p. 59.
   - Michel COMBÈS, *Fondements des mathématiques*, p. 15.
   - *Encyclopédie Alpha des sciences*, p. 34.

II. CONFRONTATION

Lorsque pour X on prend **N**, la méthode de l'externat présente une certaine unité avec celle de l'antidiagonale. Leur fond commun, cependant, donne lieu à un dédoublement autre que celui des apparences.

1. Correspondance des notions

À toute partie P de **N** on sait associer une suite binaire $S = b_0\, b_1\, b_2 \dots$ par $b_n = 1 \Leftrightarrow n \in P$. Celle-ci n'est autre que la *suite caractéristique* (ou *indicatrice*) de P. Inversement, à toute suite binaire S correspond exactement une partie P de **N** par ce procédé. On dispose ainsi d'une bijection χ de l'ensemble $\mathbf{\Sigma}$ des suites binaires dans l'ensemble $\mathbf{\Pi}$ des parties de **N**[13].

$$\chi : \begin{array}{ccc} \mathbf{\Sigma} & \to & \mathbf{\Pi} \\ S & \to & P \end{array}$$

S'il existe une bijection σ de **N** dans $\mathbf{\Sigma}$, on obtient également une bijection π de **N** dans $\mathbf{\Pi}$ en posant $\pi = \chi \circ \sigma$. La numérotation des suites binaires et celle des parties de **N** qui en résultent sont accordées, en ce sens que le même entier n sert d'indice à une partie de **N** et à sa suite caractéristique. Au lieu de $\pi(n)$ et $\sigma(n)$, on note ces dernières P^n et S^n, et l'on a $P^n = \chi\,(S^n)$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{N} \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathbf{\Sigma} \arrow[rr, "\chi"'] & & \mathbf{\Pi} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & n \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ S^n \arrow[rr, "\chi"'] & & P^n \end{tikzcd}$$

Pour σ, $\mathbf{\Sigma}$ a une diagonale D et une antidiagonale A ; pour π, $\mathbf{\Pi}$ a un internat I et un externat E ; et la bijection χ à D associe I. Considérons en effet b_n^n, terme de rang n de D ; il est aussi celui de S^n et, à ce titre, il y a équivalence entre $b_n^n = 1$ et $n \in P^n$. Or, d'après la définition de I, il y a équivalence entre $n \in P^n$ et $n \in I$. Ainsi le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de D est-il égal à 1 si et seulement si n est interne ; d'où se conclut que D est bien la suite caractéristique de I : $\chi(D) = I$. Et par un raisonnement semblable portant sur $\overline{b_n^n}$, on établirait que $\chi(A) = E$.

À partir de cette correspondance étroite entre suites binaires et parties de **N**, il est envisageable de confronter l'une à l'autre les deux preuves cantoriennes.

---

13. Si l'on avait exclu les suites ne comportant que des 1 à partir d'un certain rang, on aurait perdu ici les sections finissantes de **N**, c'est-à-dire les parties de **N** contenant tous les entiers à partir de l'un d'entre eux (voir la note 8).

2. Dédoublement des cheminements

La méthode de l'antidiagonale consiste à poser l'hypothèse H_Σ que les suites binaires forment un ensemble $\mathbf{\Sigma}$ dénombrable, puis à en produire une, l'antidiagonale A, dont il apparaît qu'elle n'appartient pas à $\mathbf{\Sigma}$. Il y a contradiction avec H_Σ en ce que $\mathbf{\Sigma}$, qui est supposé contenir toutes les suites binaires, ne contient pas A.

La méthode de l'externat consiste à poser l'hypothèse H_Π que l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ est dénombrable, puis à en définir une, l'externat E, à propos de laquelle on établit une contradiction. Celle-ci porte sur l'indice e de E : que ce numéro soit interne équivaut à ce qu'il soit externe.

À première vue ces deux démonstrations ne se déroulent donc pas de la même façon. Leurs points de départ H_Σ et H_Π sont analogues, et même accordées dans la mesure où σ et π se correspondent par χ ($\pi = \chi \circ \sigma$). On va voir cependant que chacune des deux a, non pas une, mais deux manières d'aboutir. Ces deux aboutissements seront symbolisés par C_Σ' et C_Σ'' pour la méthode de l'antidiagonale, par C_Π' et C_Π'' pour celle de l'externat. Elles se correspondent deux à deux : C_Π' est la réplique de C_Σ' et C_Π'' celle de C_Σ'', χ assurant la correspondance.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & C_\Sigma' & & & & C_\Pi' \\
 & \nearrow & & \rightarrow & & \nearrow & \\
H_\Sigma & & & \chi & H_\Pi & & \\
 & \searrow & & \rightarrow & & \searrow & \\
 & & C_\Sigma'' & & & & C_\Pi''
\end{array}
$$

La méthode de l'antidiagonale débouche sur la conséquence C_Σ' suivante : A n'appartient pas à $\mathbf{\Sigma}$; ce qui contredit directement H_Σ. Or il s'offre une autre voie pour réaliser la démonstration par l'absurde, consistant à établir une contradiction à propos d'un élément particulier de l'antidiagonale.

Tirons d'abord de nouvelles conséquences de H_Σ. Cette hypothèse étant que toute suite binaire est dans Σ_σ, il en est ainsi, en particulier, de D et de A. Désignons par d et a leurs indices. Dans Σ_σ, S^a « croise » la diagonale D : l'élément de rang a de D est celui de S^a ; il est donc celui de A. On aboutit à $b_a^a = \overline{b_a^a}$, ce qui est impossible. L'antidiagonale, à hauteur de son propre indice, devrait être différente d'elle-même. Telle est la nouvelle conséquence envisageable C_Σ'' .

$$
\begin{array}{llcl}
\text{rangs des termes } \rightarrow & 0 & & a \\
S^0 & b_0^0 & \text{-------- --} & b_a^0 \quad \text{------} \\
 & | & & | \\
 & | & & | \\
 & | & & | \\
S^a\,(=A) & b_0^a \;(=\overline{b_0^0}\,) & \text{---} & b_a^a \;(=\overline{b_a^a}\,) \;- \\
 & | & & |
\end{array}
$$

Afin de vérifier que C_Σ'' est la réplique de la conséquence C_Π'' obtenue dans la méthode de l'externat, poursuivons le rapprochement entre suites et parties : *d*, *a*, *i* et *e* étant les indices de *D*, *A*, *I* et *E*, on a $D = S^d$ et $A = S^a$, ainsi que $I = P^i$ et $E = P^e$. La concordance générale des indices assurée par χ se traduit en particulier par $d = i$ et $a = e$.

$$\begin{tikzcd} & d = i \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ D \arrow[rr, "\chi"'] & & I \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & a = e \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ A \arrow[rr, "\chi"'] & & E \end{tikzcd}$$

Montrons maintenant que la contradiction sur b_a^a est la traduction de la contradiction sur *e*. L'appartenance de *a* à *E* équivaut à ce que le terme de rang *a* vaille 1 dans la suite caractéristique de *E* ; cette suite $\chi^{-1}(E)$ n'étant autre que *A*, cela équivaut à $\overline{b_a^a} = 1$, c'est-à-dire à $b_a^a = 0$. On obtient ainsi : $a \in E \Leftrightarrow b_a^a = 0$; et, par contrecoup : $a \notin E \Leftrightarrow b_a^a = 1$. Par ailleurs *a* est égal à l'indice *e* de *E* ; on sait que si *e* est interne alors il est externe, et réciproquement ; il en résulte que si $a \in E$, alors $a \notin E$, et réciproquement. Et donc, compte tenu de ce qui précède : $b_a^a = 0$ si et seulement si $b_a^a = 1$, soit encore $b_a^a = \overline{b_a^a}$.

De son côté, la méthode de l'externat aboutit classiquement à la conséquence C_Π'' ci-dessus évoquée : la contradiction porte sur l'indice *e* de l'externat, qui doit à la fois appartenir et ne pas appartenir à ce dernier. Une autre voie possible de démonstration par l'absurde consiste à établir que *E* ne peut appartenir à l'ensemble $\mathbf{\Pi}$ des parties de **N**, supposé dénombrable.

Par définition de *E*, un entier *n* appartient à *E* si et seulement s'il n'appartient pas à sa propre image $\pi(n)$, c'est-à-dire à la partie P^n. *E*, étant ainsi distinct de tout élément P^n de $\mathbf{\Pi}$, ne peut appartenir à cet ensemble. Telle est la conséquence C_Π', aisément généralisable au cas d'un ensemble *X* quelconque. Cette démarche $H_\Pi \rightarrow C_\Pi'$ est bien sûr la réplique de la démarche $H_\Sigma \rightarrow C_\Sigma'$ [14].

En conclusion, les deux méthodes présentent bien la même structure, potentiellement du moins. Dans les deux cas on formule une hypothèse H de dénombrabilité et l'on en peut tirer deux conséquences différentes, C' et C''. L'une est qu'il existe un objet dont la non appartenance fait contradiction. L'autre est que ce même objet donne lieu à une contradiction portant sur son indice.

$$\begin{tikzcd} & C' \quad \textit{contradiction sur l'appartenance} \\ \textit{dénombrabilité} \quad H \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & C'' \quad \textit{contradiction sur l'indice} \end{tikzcd}$$

La dualité des objets (suites et sous-ensembles) n'a guère d'importance. Dans le cas de **N** il ne s'agit que de deux habillages pour ce que l'on appelle, globalement, « méthode de la diagonale ». Mais, à l'habillage près, deux voies sont praticables, $H \rightarrow C'$ et $H \rightarrow C''$.

14. Ni $H_\Sigma \rightarrow C_\Sigma''$, ni $H_\Pi \rightarrow C_\Pi'$ ne sont envisagées dans les publications recensées.

III. CRITIQUE

Une analyse plus poussée des démarches $\mathrm{H} \to \mathrm{C}'$ et $\mathrm{H} \to \mathrm{C}''$ va montrer qu'aucune des deux ne fournit une démonstration satisfaisante de non-dénombrabilité.

1. L'existence des objets cantoriens

À première vue $\mathrm{H} \to \mathrm{C}''$ se présente bien comme une manière de réaliser la démonstration par l'absurde : on pose en hypothèse ce qu'il s'agit d'infirmer et l'on en tire une contradiction. Un examen plus minutieux, sur le versant ensembliste, va mettre en évidence que les choses ne se passent pas tout à fait comme on le dit.

Dans la démonstration exposée en I.2, l'existence des objets I et E n'est jamais mise en question, même après l'apparition de la contradiction touchant l'indice e. Revenons sur leur définition. Le sous-ensemble I est défini par le prédicat « $x \in \pi(x)$ » et E par « $x \notin \pi(x)$ ». Ces prédicats unaires seront notés respectivement ι et ε. Dans la démonstration en question, on raisonne comme si l'existence de I et de E ne pouvait faire doute, c'est-à-dire comme si les prédicats ι et ε étaient bien définis sur $\mathbf{N}$[15]. Autrement dit, la démonstration comporte une hypothèse implicite h, qui est que ε est bien défini sur $\mathbf{N}$. Sous cette hypothèse h, E existe ; par π il a un antécédent e ; et l'on aboutit à une contradiction sur e. La démarche $\mathrm{H} \to \mathrm{C}''$ s'analyse donc, en fait, en $\mathrm{H} \to (h \to \mathrm{C}'')$. Or il est apparu que, sous l'hypothèse H_{Π}, ε est mal défini sur $\mathbf{N}$, en e très précisément. L'équivalence entre $e \notin \pi(e)$ et $e \in \pi(e)$ peut se traduire ainsi : si le prédicat ε est vrai en e, alors il y est faux, et réciproquement[16]. Cette contradiction sur e une fois mise en évidence, il n'est pas permis de conclure que H_{Π} est intenable. Sous cette hypothèse, la contradiction prouve non$-h$. La seule conclusion légitime est que la dénombrabilité de $\mathbf{\Pi}$ est incompatible avec l'existence de E, ainsi qu'avec celle de I par passage au complémentaire.

La réfutation de la démarche $\mathrm{H} \to \mathrm{C}''$ qui vient d'être effectuée se généralise sans peine à un ensemble X quelconque. Le théorème de Cantor, par cette voie, n'est donc pas démontré.

---

15. Un prédicat $\mathrm{P}(x)$ caractérise un sous-ensemble Y d'un ensemble X par $Y = \{ x \in X \mid \mathrm{P}(x) \}$, à condition d'être bien défini sur X ; c'est-à-dire à condition que, pour chaque élément x de X, $\mathrm{P}(x)$ soit effectivement vrai ou effectivement faux.

Zermelo fut modérément exigeant sur la forme de $\mathrm{P}(x)$ lorsqu'il procéda à l'axiomatisation de la théorie des ensembles. Fraenkel et Skolem, y remédièrent par la suite. Voir Fraenkel, Bar-Hillel & Levy, *Foundations of Set Theory*, pp. 37-38.

La notion de prédicat est ici abusivement confondue avec celle de fonction propositionnelle, comme il se fait souvent.

16. Par définition de I, son indice i appartient à I si et seulement si i appartient à I. Le constat vaut aussi pour E, qui est le complémentaire de I : $i \in I \Leftrightarrow i \notin I$ donne $i \in E \Leftrightarrow i \notin E$. Les prédicats $\boldsymbol{\iota}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ risquent donc, en outre, d'être mal définis en i puisque l'on risque de ne pas pouvoir décider si cet entier les vérifie ou pas. Mais on en restera là sur cette question d'une possible indétermination de I et de E.

De ce qui précède il faut aussi conclure que l'on ne peut pas plus suivre l'autre démarche, à savoir H $\rightarrow$ C'. Car C" a pour conséquence que, A et E n'existant pas, la question de leur localisation n'a pas de sens. Contrairement à ce qui se dit habituellement de A, on ne peut conclure qu'elle n'appartient pas à $\boldsymbol{\Sigma}$. La conséquence C' ne peut donc pas, elle non plus, faire objection à H.

Ainsi peut-on estimer établi que les deux démonstrations classiques de non dénombrabilité sont invalides.

2. Une variante pour l'antidiagonale

On peut être tenté de sauver la démarche $\mathrm{H}_{\Sigma} \rightarrow \mathrm{C}_{\Sigma}'$ en l'amendant comme suit. Au lieu de supposer dénombrable l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}$ de toutes les suites binaires, on considère une partie dénombrable quelconque $\boldsymbol{\Sigma}^*$ de $\boldsymbol{\Sigma}$, dont on numérote les éléments [17]. Son antidiagonale A^*, par construction, est différente de toutes les suites présentes dans $\boldsymbol{\Sigma}^*$. Il en résulte que, puisqu'il existe au moins un élément A^* de $\boldsymbol{\Sigma}$ qui n'appartient pas à $\boldsymbol{\Sigma}^*$, $\boldsymbol{\Sigma}$ ne peut coïncider avec aucune partie dénombrable de lui-même. Cet ensemble $\boldsymbol{\Sigma}$ lui-même n'est donc pas dénombrable [18].

Cette tentative n'est toutefois pas viable ; elle ne fait que mieux masquer le point décisif. Explicitons d'abord ce qui permettrait de dire que $\boldsymbol{\Sigma}$ ne peut coïncider avec aucune partie dénombrable de lui-même : si $\boldsymbol{\Sigma}$ coïncidait avec une partie $\boldsymbol{\Sigma}^*$, on aurait d'une part A^* dans $\boldsymbol{\Sigma}$, par définition de cette dernière ; et d'autre part A^* hors de $\boldsymbol{\Sigma}$, puisque A^* est toujours extérieure à $\boldsymbol{\Sigma}^*$ qui, ici, est $\boldsymbol{\Sigma}$. On aurait ainsi la contradiction souhaitée.

Ce raisonnement porte sur une partie dénombrable $\boldsymbol{\Sigma}^*$, prétendue quelconque, pour laquelle il est implicitement supposé que A^* existe. Tant que $\boldsymbol{\Sigma}^*$ est strictement incluse dans $\boldsymbol{\Sigma}$, A^* existe effectivement, hors de $\boldsymbol{\Sigma}^*$. Mais supposer que $\boldsymbol{\Sigma}^*$ soit $\boldsymbol{\Sigma}$ tout entier revient à poser l'hypothèse H de dénombrabilité. Dans ce cas A^* serait A, dont on a vu précédemment que, dans de telles conditions, elle n'existe pas.

3. Remarques sur la diagonale

À titre de curiosité, on peut regarder, sans faire appel à χ, la forme que les défauts rencontrés dans I et E prennent avec D et A.

17. Dans les notations, il n'a pas paru indispensable de distinguer ici les suites des ensembles.

18. Telle est la subtile démarche de Stephen Kleene. Sa démonstration porte sur les fonctions arithmétiques (applications de **N** dans **N**), ce qui donne de la généralité à son propos mais ne change rien sur le fond.

Il introduit comme suit sa démonstration : « Montrons que l'ensemble de (toutes) ces fonctions n'est pas dénombrable. Pour cela supposons que soit donnée une énumération $f_0(a), f_1(a), f_2(a), \ldots$ des fonctions arithmétiques à une place (il n'est pas nécessaire qu'elle soit exhaustive). Nous allons nous en servir pour construire une fonction arithmétique à une place $f(a)$ qui sera différente de chaque fonction appartenant à l'énumération donnée. Cela prouvera que cette énumération ne saurait être une énumération de toutes les fonctions arithmétiques à une place. » (*Logique mathématique*, p. 188). On aura remarqué le « pas nécessaire ».

Kleene détaille ensuite la construction de $f(a)$. Mais pour ce qui est de la fin de la démonstration, le lecteur doit se contenter du « Cela prouvera ... ».

Examinons de plus près la diagonale elle-même, d'indice d sous l'hypothèse de numérotabilité des suites binaires. La définition de la diagonale donne pour valeur au $(d+1)^{\text{ième}}$ élément de D celle de b_d^d , qui est par définition le $(d+1)^{\text{ième}}$ élément de S^d. Mais cette dernière n'est autre que D elle-même. Le $(d+1)^{\text{ième}}$ terme de D risque donc d'être défini par l'égalité à soi-même. Cette possibilité d'indétermination de D, pour son terme de rang d, se répercute sur A. Dans la mesure où l'élément b_d^d de D ne serait pas déterminé, il pourrait en aller de même pour l'élément de rang d dans A, à savoir b_d^a égal à $\overline{b_d^d}$.

Mais plus important est que la contradiction qui touche A au rang a se retrouve au même rang dans D. En effet, la définition de A donne $b_a^a = \overline{b_a^d}$, d'où découle $\overline{b_a^a} = b_a^d$; la contradiction $b_a^a = \overline{b_a^a}$ devient, par substitution sur ses deux membres, $\overline{b_a^d} = b_a^d$ [19].

$$
\begin{array}{lccccc}
 & & d & & a & \\
 & & | & & | & \\
S^d\,(=D) & -- & b_d^d & ----- & b_a^d & (=\ \overline{b_a^d}\ )-- \\
 & & | & & | & \\
 & & | & & | & \\
S^a\,(=A) & -- & b_d^a & ----- & b_a^a & (=\ \overline{b_a^a}\ )-- \\
 & & | & & | & \\
\end{array}
$$

risques d'indétermination contradictions

*

19. Voir la note 16.

BIBLIOGRAPHIE

- Josette ADDA. *Éléments de logique pour enseignants en mathématiques*. Cours polycopié, IREM de Paris, 1970.
- Michel COMBÈS. *Fondements des mathématiques*. PUF, 1971.
- J. et M. CORET. *Théorie élémentaire de la cardinalité.* Cours polycopié, Paris VII, 1970.
- Jean CAVAILLÈS. *Méthode axiomatique et formalisme*. Hermann, 1981.
- Jean-Toussaint DESANTI. *Les Idéalités mathématiques*. Éditions du Seuil, 1968.
- Jean DHOMBRES. *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire*. Cedic / Fernand Nathan, 1978.
- École Normale Supérieure (Séminaire de philosophie et mathématiques). *Penser les mathématiques*. Éditions du Seuil, 1982.
- *Encyclopédie Alpha des sciences*, volume « Mathématiques ». La Grange Batelière et Éditions Atlas, 1976.
- A. A. FRAENKEL, Y. BAR-HILLEL & A. LEVY. *Foundations of Set Theory*. Elsevier, 1984 (première édition : North-Holland, 1958).
- Stephen C. KLEENE. *Logique mathématique* (traduction de Jean Largeault). Librairie Armand Colin, 1971.
- Jean-Louis KRIVINE. *Théorie axiomatique des ensembles*. PUF, 1969.
- Marco PANZA et Jean-Michel SALANSKIS (sous la direction de –). *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles.* Masson, 1995.
- Bernard RUYER, *Logique*. PUF, 1990.

*